

# Equacionando problemas – II

## Introdução

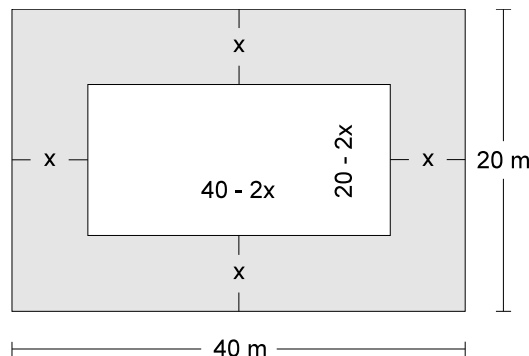
Nas duas últimas aulas, resolvemos diversas equações do 2º grau pelo processo de completar o quadrado perfeito ou pela utilização da fórmula de Bhaskara.

Na aula de hoje, resolveremos alguns problemas com o auxílio dessa fórmula.

## Nossa aula

Com a utilização da fórmula de Bhaskara  $\left( = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$  podemos solucionar muitos problemas práticos.

Observe o exemplo: a prefeitura de uma cidade deseja cimentar o contorno de uma praça retangular de 40 m por 20 m. Para que a faixa a ser cimentada seja uniforme e a área interna da praça tenha 476 m<sup>2</sup>, que largura deverá ter essa faixa?



A área interna da praça é:

$$(40 - 2x)(20 - 2x) = 476 \text{ m}^2$$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

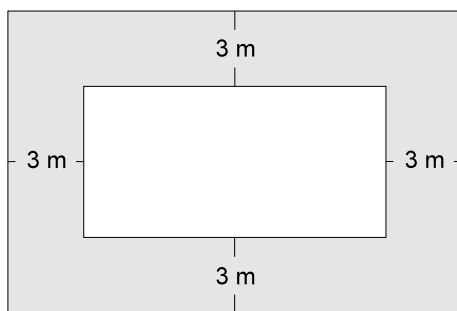
$$4x^2 - 120x + 324 = 0$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 324}}{2} = \frac{30 \pm 24}{2}$$

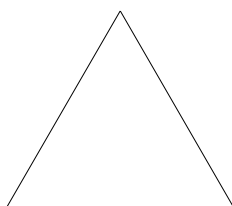
Como a faixa não pode ser maior que a própria praça, descartamos a raiz  $x = 27$ . Assim, a solução do problema deverá ser a raiz  $x = 3$ .

Isto significa que a faixa ao redor da praça deverá ter **3 m** de largura.

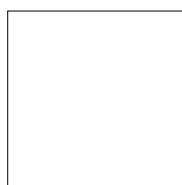


## O número de diagonais de um polígono

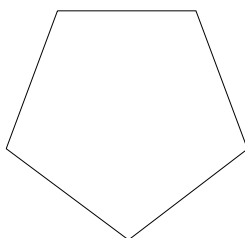
Um polígono tem  $n$  lados, sendo  $n \geq 3$ . Veja os exemplos:



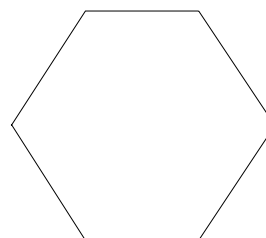
$n = 3$   
triângulo



$n = 4$   
quadrilátero

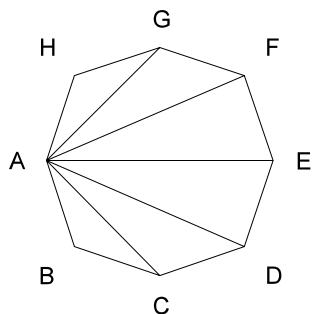


$n = 5$   
pentágono



$n = 6$   
hexágono

De cada um dos vértices de um polígono saem  $n - 3$  diagonais.



Do vértice A desse octógono (polígono de 8 lados) saem 5 diagonais ( $8 - 3 = 5$ ).

Como são  $n$  lados, temos  $n(n - 3)$  diagonais. Entretanto, essa expressão deve ser dividida por 2, caso contrário uma mesma diagonal será contada duas vezes (a diagonal AC é a mesma diagonal CA).

Então, temos que o número de diagonais de um polígono é:

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Nessa expressão,  $D$  representa o número de diagonais e  $n$  o número de lados do polígono.

Assim, vemos que há uma relação entre o número de lados e o número de diagonais de um polígono.

Para descobrir todas as diagonais de um octógono, acompanhe o cálculo abaixo:

$$n = 8 \quad \textcircled{R} \quad D = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

Se quiser conferir o resultado, desenhe esse polígono e trace suas diagonais.

### EXEMPLO 1

Qual é o polígono que tem 90 diagonais?

$$D = \frac{n(n-3)}{2} \quad \textcircled{R} \quad 90 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \textcircled{R} \quad 180 = n(n-3) \quad \textcircled{R}$$

$$\textcircled{R} \quad 180 = n^2 - 3n \quad \textcircled{R} \quad n^2 - 3n - 180 = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação  $n^2 - 3n - 180 = 0$ , temos:

$$(a = 1 \quad b = -3 \quad c = -180)$$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+720}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{3 \pm 27}{2}; \quad n_1 = 15, \quad n_2 = -12$$

Como as diagonais de um polígono são representadas por um número inteiro e positivo, abandonaremos a raiz  $n = -12$ .

Portanto, o polígono que tem 90 diagonais é o polígono de **15 lados**.

Verificando a solução, pela substituição da raiz, temos:

$$90 = \frac{15(15-3)}{2} \rightarrow 180 = 15 \cdot 12 \rightarrow 180 = 180$$

**solução verdadeira**

### Existe polígono com 100 diagonais?

$$100 = \frac{n(n-3)}{2} \rightarrow 200 = n(n-3) \rightarrow 200 = n^2 - 3n \rightarrow n^2 - 3n - 200 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

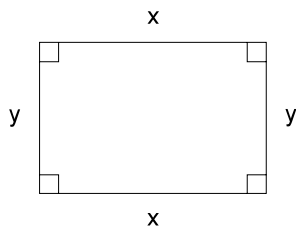
$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+800}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{809}}{2}$$

Como a  $\sqrt{809}$  não é exata, as raízes da equação  $n^2 - 3n - 200 = 0$  não podem ser valores inteiros. Nesse caso, concluímos que **não existe** polígono com 100 diagonais.

Observe que a equação  $n^2 - 3n - 200 = 0$  possui duas raízes reais. No entanto, nenhuma delas satisfaz a solução do problema. Muitas vezes não basta resolver a equação, pois é preciso analisar a solução encontrada.

Conhecendo a área e o perímetro de um retângulo, é possível calcular suas dimensões.

Quais as dimensões de um retângulo que têm 18 cm de perímetro e 20 cm<sup>2</sup> de área?



$$\begin{aligned} \text{Área: } x \cdot y &= 20 \\ \text{Perímetro: } 2x + 2y &= 18 \end{aligned}$$

De acordo com as dimensões  $x$  e  $y$  da figura, devemos encontrar os valores  $x$  e  $y$  que satisfaçam as duas equações.

Simplificando a 2ª equação, temos:

$$2x + 2y = 18 \quad \rightarrow \quad x + y = 9 \quad \rightarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo  $x = 9 - y$  na 1ª equação:

$$x \cdot y = 20 \quad \rightarrow \quad (9 - y) \cdot y = 20 \quad \rightarrow \quad 9y - y^2 = 20$$

Assim, temos a equação do 2º grau:  $y^2 - 9y + 20 = 0$

Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$y = 5$   
 $y = -4$

Desconsiderando o valor  $y = -4$ , temos que:

$$y = 5 \quad \rightarrow \quad x = 9 - 5 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Portanto, as dimensões desse retângulo são 5 cm e 4 cm.

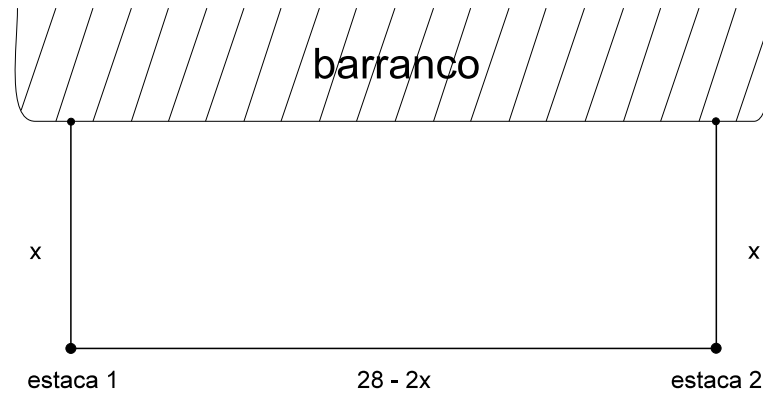
Verificando a solução, pela substituição das raízes, temos:

$$5 \cdot 4 = 20 \quad \rightarrow \quad 20 = 20 \text{ (solução verdadeira)}$$

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 18 \quad \rightarrow \quad 10 + 8 = 18 \quad \rightarrow \quad 18 = 18 \text{ (solução verdadeira)}$$

## Na vida real

Seu Pedro deseja cercar o terreno onde vai construir sua casa. Para tanto, ele pretende aproveitar um barranco e cercar os outros 3 lados, de forma a obter um retângulo. Como a área do terreno é de  $96 \text{ m}^2$  e ele dispõe de um rolo de  $28 \text{ m}$  de tela, a que distância do barranco deverão ser colocadas as estacas 1 e 2?



$$\text{Área} = 96 \rightarrow x(28 - 2x) = 96$$

$$28x - 2x^2 = 96 \rightarrow 2x^2 - 28x + 96 = 0$$

Resolvendo essa equação, temos:  $x = 8$

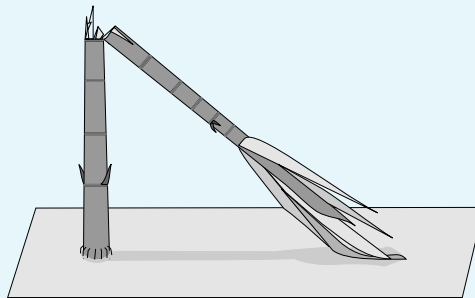
Portanto, seu Pedro deverá colocar as estacas a  $8 \text{ m}$  do barranco.

## Curiosidade

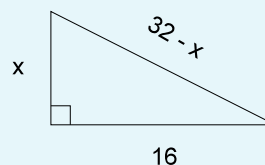
Um bambu de  $32$  côvados, erguendo-se verticalmente sobre um terreno horizontal, é quebrado num certo ponto pela força do vento.

Sabendo que sua extremidade tocou a terra a  $16$  côvados do seu pé, responda: a quantos côvados do seu pé estava o ponto em que o bambu foi atingido pela força do vento?

Observação: côvado é uma unidade de medida de comprimento usada na Antigüidade.



Observando a figura, vemos que o bambu forma com o chão um triângulo retângulo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras e desenvolvendo o produto notável, temos:

$$(32 - x)^2 = x^2 + 16^2$$

$$1024 - 64x + x^2 = x^2 + 256$$

$$- 64x = - 768$$

$$x = 12$$

Portanto, o ponto em que o bambu foi atingido pela força do vento estava a 12 côvados do pé. O problema apresentando acima foi enunciado pelos chineses em 2600 a.C.. No entanto, foi reescrito por Bhaskara no século XII.

### Exercício 1

De acordo com a expressão  $D = \frac{n(n-3)}{2}$ , diga qual o polígono que possui:

- a) 35 diagonais
- b) 54 diagonais
- c) 170 diagonais

### Exercícios

### Exercício 2

Quais as dimensões de um retângulo que tem 30 cm de perímetro e 50 cm<sup>2</sup> de área?

### Exercício 3

Ao cercar um terreno retangular, dando três voltas completas, uma pessoa gastou 180 m de arame. Quais as dimensões desse retângulo, sabendo que o comprimento é o dobro da altura.

### Exercício 4

Sabendo que a soma de dois números é 37 e seu produto é 300, descubra quais são esses números.

### Exercício 5

Equacione o texto abaixo e resolva:

*“Estavam os pássaros  
divididos em dois grupos:  
enquanto o quadrado da oitava parte  
se divertia cantando sobre as árvores,  
outros doze sobrevoavam  
o campo também cantando alegremente.”*

Quantos pássaros havia no total?