

Fatoração

Introdução

A palavra **fatoração** nos leva a pensar em **fatores**, e, como já sabemos, fatores são os elementos de uma multiplicação. Fatorar um número, portanto, é escrevê-lo na forma de uma multiplicação de fatores. Por exemplo, o número 16 pode ser escrito como uma multiplicação de fatores, de várias maneiras:

$$\begin{aligned} 16 &= 2 \times 8 \\ 16 &= 4 \times 4 \\ 16 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \text{ou ainda } 16 = 2^4 \end{aligned}$$

No caso de uma expressão numérica, cujas parcelas têm um fator comum, podemos fatorá-la, assim:

$$\underbrace{7 \times 2 + 5 \times 2}_{\text{soma de 2 parcelas}} = \underbrace{(7 + 5) \times 2}_{\text{produto de dois fatores}} \rightarrow \text{forma fatorada da expressão numérica}$$

Vamos aprender, nesta aula, a fatoração de expressões algébricas, que é muito utilizada para a simplificação dos cálculos algébricos.

Nossa aula

Vamos considerar um terreno formado por dois lotes de comprimentos diferentes e de mesma largura:



Podemos calcular a área total do terreno de duas maneiras diferentes:

- Calculando a área de cada lote e depois somando-as.
- Somando os comprimentos dos dois lotes e calculando diretamente a área total do terreno.

As duas maneiras dão o mesmo resultado; portanto, podemos escrever:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área do lote I: } ax \\ \text{Área do lote II: } bx \end{array} \right\} \text{ Somando as duas áreas: } ax + bx$$

Comprimento total do terreno: $(a + b)$

Área do terreno: $(a + b) \times$

$$\text{Logo: } \underbrace{ax + bx}_{\text{soma de duas parcelas}} = \underbrace{(a + b) \times}_{\text{produto de dois fatores}}$$

Portanto, sempre que numa soma de duas ou mais parcelas houver um fator comum a todas as parcelas (como o x em $ax + bx$), podemos fatorar essa expressão, e esse fator comum será um dos fatores da expressão após ser fatorada.

Como fazer para descobrir o outro fator da expressão fatorada?

Basta dividir a expressão que vai ser fatorada pelo fator comum.

EXEMPLO 1

Fatore a expressão: $3xy + 6x$. Temos que 3 e x são fatores comuns às duas parcelas. Podemos, então, escrever a expressão assim:

$$\begin{aligned} 3xy + 6x &= 3x \cdot \left(\frac{3xy}{3x} + \frac{6x}{3x} \right) \\ &= 3x \cdot \left(\frac{\cancel{3}xy}{\cancel{3}x} + \frac{2\cancel{6}\cancel{x}}{\cancel{3}\cancel{x}} \right) \end{aligned} \quad \text{simplificando as frações}$$

$$3xy + 6x = 3x(y + 2)$$

Dizemos que o fator $3x$ foi colocado “em evidência”, isto é, “em destaque”. Na prática, as divisões feitas dentro dos parênteses são feitas “de cabeça”.

EXEMPLO 2

Fatore $2a^2b - 4ab^2$.

Os fatores comuns são 2, a e b .

Colocando $2 \cdot a \cdot b$ “em evidência”, temos:

$$2a^2b - 4ab^2 = 2ab \cdot (a - 2b) \quad \text{divisão feita “de cabeça”}$$

Para ter certeza de que a divisão foi feita corretamente, você pode fazer a verificação assim:

$$\overbrace{2ab(a - 2b)} = 2a^2b - 4ab^2$$

Ou seja, foi usada a propriedade distributiva da multiplicação para verificar se a fatoração está correta.

Podemos também fatorar as expressões algébricas que são resultados de produtos conhecidos, como os produtos notáveis estudados na aula anterior.

A expressão $a^2 - b^2$ é resultado do produto $(a + b) \cdot (a - b)$; então podemos fatorar toda expressão da seguinte maneira:

- $$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3) \rightarrow \text{forma fatorada}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \\ (2x)^2 & 3^2 & \end{array}$$
- $$36a^2 - 1 = (6a + 1)(6a - 1)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \\ (6a)^2 & 1^2 & \end{array}$$
- $$16 - \frac{x^2}{25} = \left(4 + \frac{x}{5}\right) \cdot \left(4 - \frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \\ 4^2 & \left(\frac{x}{5}\right)^2 & \end{array}$$

Os outros dois produtos notáveis resultam em trinômios quadrados perfeitos. Como os dois casos diferem apenas num sinal, podemos escrever os dois juntos usando os dois sinais ao mesmo tempo, assim:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Que se lê:

“O quadrado da soma ou da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais ou menos duas vezes o 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.”

Então, sempre que tivermos um trinômio quadrado perfeito podemos fatorá-lo escrevendo-o na forma de um quadrado da soma ou da diferença de dois termos. Por exemplo:

- $$x^2 + 8x + 16$$

$$\begin{array}{ccc} \text{quadrado} & & \text{quadrado} \\ \text{de } x & \uparrow & \text{de } 4 \\ & 2 \cdot x \cdot 4 & \end{array}$$

Então, podemos escrever:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \rightarrow \text{forma fatorada}$$

$$\begin{array}{c}
 \bullet \quad a^2 + 8a + 9 \\
 \downarrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \text{quadrado} \qquad \qquad \text{quadrado} \\
 \text{de } a \qquad \qquad \text{de } 3 \\
 \backslash \qquad \qquad \qquad / \\
 2 \cdot a \cdot 3 \\
 \hline
 6a + 8a
 \end{array}$$

Nesse caso, o trinômio não é quadrado perfeito e, portanto, não pode ser fatorado.

$$\begin{array}{c}
 \bullet \quad x^4 - 2x^2 + 1 \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 (x^2)^2 \qquad \qquad 1^2 \\
 \backslash \qquad \qquad \qquad / \\
 2 \cdot x^2 \cdot 1 \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}$$

O trinômio é quadrado perfeito e vamos escrevê-lo na forma fatorada:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

Exercício 1

Calcule o valor de $5 \cdot 36 + 5 \cdot 24 + 5 \cdot 15$, fatorando antes a expressão.

Exercícios

Exercício 2

Fatore as expressões algébricas, colocando o fator comum em evidência:

- a) $x^2 + 11x$
- b) $a^2b + 4ab + ab^2$

Exercício 3

Verifique se o trinômio $x^2 - 12x + 64$ é um trinômio quadrado perfeito, justificando a resposta.

Exercício 4

Fatore o trinômio $a^2x^2 + 2ax + 1$.

Exercício 5

Fatore a expressão $x^4 - 16$ e, se ainda for possível, fatoro o resultado obtido. Isso quer dizer fatorar completamente a expressão.

Exercício 6

Simplifique a fração $\frac{a^2 - 10a + 25}{a - 5}$, fatorando antes o numerador da fração.

Exercício 7

Complete o trinômio quadrado perfeito com o termo que está faltando:
 $x^2 - \dots + 9y^2$