AULA

71

Produtos notáveis

Introdução

O cálculo algébrico é uma valiosa ferramenta para a álgebra e para a geometria. Em aulas anteriores, já vimos algumas operações com expressões algébricas.

Nesta aula, estudaremos alguns produtos especialmente importantes porque aparecem com muita freqüência no cálculo algébrico. Esses produtos são conhecidos pelo nome de **produtos notáveis**. *Produto* por ser resultado de uma multiplicação, e *notável* por ser importante, digno de nota, que se destaca.

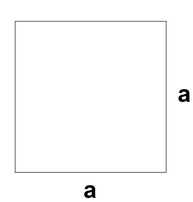
Nossa aula

Vamos verificar que podemos calcular a área de algumas figuras de maneiras diferentes.

Primeiro produto notável

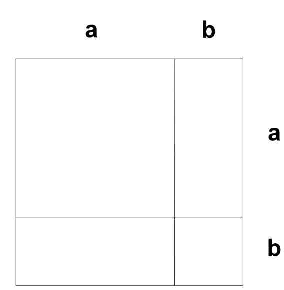
Vejamos a área da figura abaixo, cujo lado mede **a**.

Área: a^2

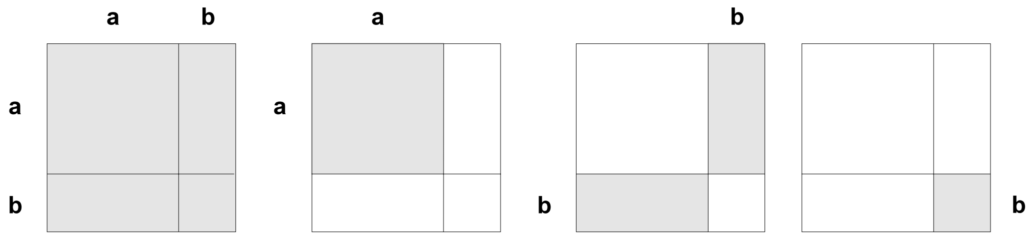


Aumentando de **b** a medida de cada lado desse quadrado, determinamos um quadrado de lado **a + b**, assim:

Área: $(a + b)^2$



Outra maneira de calcular a área desse quadrado é somando as áreas de cada uma das figuras que o formam. Observe que temos dois quadrados, de lados **a** e **b** respectivamente, e dois retângulos iguais, cujas dimensões são **a** e **b**:



$$(a + b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + \quad 2 \cdot ab \quad + \quad b^2$$

Podemos ainda calcular a área desse quadrado usando cálculo algébrico:

$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$ — *Elevar ao quadrado éo mesmoque multiplicar dois fatores iguais.*

$(a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$ — *Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.*

$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — *Efetuando os termos semelhantes.*

Logo:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

O trinômio obtido é chamado de **trinômio quadrado perfeito** por ser o resultado do quadrado de (a + b).

Observe novamente esse produto:

$$\overbrace{(a + b)^2}^{\textbf{quadrado da soma}} = \overbrace{a^2 + 2ab + b^2}^{\textbf{trinômio quadrado perfeito}}$$

a	b	a^2	$2ab$	b^2
1º termo	**2º termo**	**quadrado do 1º**	**duas vezes o 1º pelo 2º**	**quadrado do 2º**

Portanto, o primeiro produto notável pode ser lido assim:

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o produto do 1º pelo 2º, mais o quadrado do 2º termo.

EXEMPLO 1

Podemos calcular $(2 + 3)^2$ de duas maneiras:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$
$$(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 . 2 . 3 + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$$

Encontramos o mesmo resultado nos dois caminhos usados.

É claro que, nesse exemplo, não faz sentido usar a conclusão do produto notável, pois, como os termos da soma são números, podemos achar diretamente o resultado, somando os números e elevando o resultado ao quadrado.

No caso de uma soma algébrica, é impossível efetuar a adição, e então temos de usar a regra do produto notável.

EXEMPLO 2

- $(x + 1)^2 = x^2 + 2 . x . 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$
- $\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot y + y^2 = \frac{x^2}{4} + xy + y^2$
- $(a^2 + 3b)^2 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 3b + (3b)^2 = a^4 + 6a^2b + 9b^2$

Segundo produto notável

O segundo produto notável é o quadrado da diferença entre dois termos e é praticamente igual ao primeiro produto, sendo a única diferença o sinal. Vamos calculá-lo:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b) = a^2 - ab - ba + (- b)^2 =$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Logo:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

que pode ser lido assim:

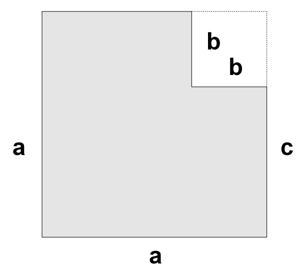
O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.

EXEMPLO 3

- $(a - 2)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 - 4a + 4$
- $(x^2 - 2y)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2y + (2y)^2 = x^4 - 4x^2y + 4y^2$
- $\left(4x - \frac{3y}{4}\right)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{3y}{4} + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = 16x^2 - 6xy + \frac{9y^2}{16}$

Terceiro produto notável

O terceiro produto notável pode ser mostrado por meio do cálculo da área de uma figura. Essa área será calculada também de duas maneiras diferentes.



A área que devemos calcular é a da figura pintada em forma de **L** que tem três dimensões diferentes **a**, **b** e **c**.

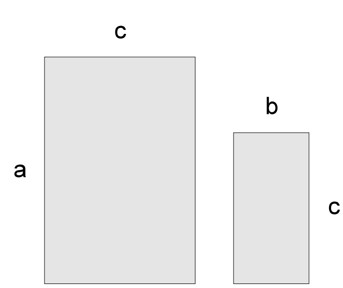
Completando as linhas tracejadas, obtemos um quadrado maior de lado **a** e um quadrado menor de lado **b**.

A área da figura pintada pode ser calculada fazendo-se a diferença entre a área do quadrado maior e a área do quadrado menor:

Área do L = área do quadrado maior - área do quadrado menor

$$\boxed{\textbf{Área do L} = a^2 - b^2}$$

Outra maneira para calcular a área do **L** é decompor a figura em dois retângulos, assim:



Observe na figura anterior, que c = a - b

Como os dois retângulos têm uma das dimensões iguais (**c**), vamos colocá-los juntos de maneira a formar um só retângulo de medidas **a + b** e **a - b**.

comprimento: a + b
largura: a - b

Calculando a área do retângulo, que é igual à área do **L**, temos:

Área do retângulo: (a + b) (a - b)

Então: $\boxed{\mathbf{(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2}}$ que pode ser lido:

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

EXEMPLO 4

- $(x + 2)\ (x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
- $(2x - 5y)\ (2x + 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$
- $(a^2 + b)\ (a^2 - b) = (a^2)^2 - b^2 = a^4 - b^2$
- $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

Observações

1. Quando se diz "o quadrado da soma de dois números", essa sentença é representada algebricamente por $(x + y)^2$.

2. Quando se diz "a soma dos quadrados de dois números", a expressão correspondente é $x^2 + y^2$.

3. Da mesma forma, "o quadrado da diferença" representa-se por $(x - y)^2$ e "a diferença entre dois quadrados" por $x^2 - y^2$.

Resumindo

Os três produtos notáveis estudados nesta aula são:

1. Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Quadrado da diferença de dois termos: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exercícios

Exercício 1

Sabendo que $x^2 + y^2 = 29$ e $(x + y)^2 = 49$ são números inteiros positivos, determine:

a) $x + y$

b) xy

c) x e y

Sugestão: desenvolver $(x + y)^2$ e substituir $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ pelos seus valores dados pelo enunciado.

Exercício 2

Efetue:

a) $(2x + 3y)^2$

b) $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2$

c) $(x^2 - 2xy)(x^2 + 2xy)$

Exercício 3

Qual o polinômio que somado a $(a + 2)(a - 2)$ dá $(a + 2)^2$ como resultado?

Exercício 4

Observe os seguintes trinômios quadrados perfeitos e determine os quadrados correspondentes:

a) $x^2 + 2ax + a^2$

b) $4x^2 + 4x + 1$