

Sistemas do 1º grau

Introdução

*P*edro e José são amigos. Ao saírem do trabalho, passaram por uma livraria onde havia vários objetos em promoção. Pedro comprou 2 cadernos e 3 livros e pagou R\$ 17,40, no total. José gastou R\$ 11,20 na compra de 2 livros e 1 caderno. Os dois ficaram satisfeitos e foram para casa.

No dia seguinte, quiseram contar a um terceiro colega sobre suas compras, mas não se lembravam do preço unitário dos livros. Sabiam apenas que todos os livros, assim como todos os cadernos, tinham o mesmo preço.

E agora... Será que existe algum modo de descobrir o preço de cada livro ou caderno com as informações que temos?

Acompanhe a aula e descubra...

Nossa aula

Em aulas anteriores, você viu que existem equações do 1º grau com duas incógnitas, como por exemplo:

$$x + y = 5 \quad x - y = 3 \quad x + 2y = 8$$

Você viu, também que as equações do 1º grau com duas variáveis admitem infinitas soluções:

$$x + y = 5 \quad \text{e} \quad x - y = 3$$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
...	...

x	y
0	-3
1	-2
2	-1
3	0
4	1
5	2
...	...

Observando as tabelas de soluções das duas equações, verificamos que o par (4; 1), isto é, $x = 4$ e $y = 1$, é solução para as duas equações. Dessa forma, podemos dizer que as equações $x + y = 5$ e $x - y = 3$ formam um **sistema** de equações do 1º grau que admitem uma solução comum.

A Matemática utiliza o símbolo $\{$ para indicar que duas (ou mais) equações formam um sistema. Veja os exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - 3z = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Observação: Aqui, vamos estudar apenas os sistemas do 1º grau com duas equações de duas variáveis.

Resolução de sistemas

Resolver um sistema é encontrar um par de valores (x e y) que tornem verdadeiras as equações que o formam.

Por exemplo, o par $(3; 2)$ é solução do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$?

Para fazer verificação, devemos substituir os valores $x = 3$ e $y = 2$ em ambas as equações:

$$\begin{array}{ll} x - y = 1 & x + y = 5 \\ 3 - 2 = 1 & 3 + 2 = 5 \\ 1 = 1 & 5 = 5 \\ \text{(verdadeiro)} & \text{(verdadeiro)} \end{array}$$

Sim, o par $(3; 2)$ é solução do sistema, pois torna as equações verdadeiras.

O método da substituição

Esse método de resolução de um sistema consiste em “tirar” o valor de uma incógnita e substituir esse valor na outra equação. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Escolhemos uma das equações e “tiramos” o valor de uma das incógnitas, ou seja, estabelecemos seu valor em função da outra incógnita, assim:

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y$$

Agora, temos o valor de x em função de y e podemos substituir esse valor na outra equação:

$$\begin{array}{l} x + y = 5 \\ \Downarrow \\ 1 + y + y = 5 \\ 1 + 2y = 5 \\ 2y = 5 - 1 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\text{Como } x = 1 + y \rightarrow x = 1 + 2 \rightarrow x = 3.$$

Temos então que o par $(3; 2)$ é solução do sistema.

Qual é mesmo o preço do livro?

Releia o problema proposto na introdução deste capítulo e acompanhe sua resolução.

Uma etapa importante na solução de um problema é a tradução dos dados em linguagem matemática. Para essa etapa, vamos usar as variáveis x e y em vez de **caderno** e **livro**. Organizamos os dados assim:

$$\text{Pedro: } 3 \text{ livros} + 2 \text{ cadernos} = \text{R\$ } 17,40 \rightarrow 3x + 2y = 17,40$$

$$\text{José: } 2 \text{ livros} + 1 \text{ caderno} = \text{R\$ } 11,20 \rightarrow 2x + y = 11,20$$

Temos, assim, o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17,40 \\ 2x + y = 11,20 \end{cases}$$

Estabelecendo o valor de y em função de x na 2ª equação, temos:

$$y = 11,20 - 2x$$

Substituindo esse valor na 1ª equação:

$$3x + 2(11,20 - 2x) = 17,40$$

Temos uma equação do 1º grau, com apenas uma incógnita. Resolvendo essa equação:

$$3x + 22,40 - 4x = 17,40$$

$$-x = 17,40 - 22,40$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

$$\text{Como } y = 11,20 - 2x \rightarrow y = 11,20 - 10 \rightarrow y = 1,20$$

Portanto, cada livro custou **R\$ 5,00** e cada caderno, **R\$ 1,20**.

Verificação

$$\text{Pedro: } 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1,20 = 15 + 2,40 = 17,40$$

$$\text{José: } 2 \cdot 5 + 1,20 = 10 + 1,20 = 11,20$$

O método da adição

Esse outro método de resolução de um sistema consiste em somar os termos das equações. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$x - y = -4$$

$$2x + y = 9 \quad +$$

$$\hline 3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Veja que quando somamos as duas equações o termo em y se anula. Por que isso ocorreu? Pense!

Para obter o valor de y , devemos substituir o valor de x , encontrado em uma das equações:

$$x - y = -4 \rightarrow \frac{5}{3} - y = -4 \rightarrow -y = -4 - \frac{5}{3}$$

$$-y = \frac{-12 - 5}{3} \rightarrow -y = \frac{-17}{3} \rightarrow y = \frac{17}{3}$$

A solução do sistema é o par $\left(\frac{5}{3}; \frac{17}{3}\right)$

Verificação

$$x - y = -4 \rightarrow \frac{5}{3} - \frac{17}{3} = -4 \rightarrow \frac{-12}{3} = -4 \text{ (verdadeiro)}$$

$$2x + y = 9 \rightarrow 2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{17}{3} = 9 \rightarrow \frac{10}{3} + \frac{17}{3} = 9 \rightarrow \frac{27}{3} = 9 \text{ (verdadeiro)}$$

Usando um artifício de cálculo

Vamos resolver o sistema abaixo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Se somarmos as equações do jeito que estão, não conseguiremos **anular** um dos termos. Por isso, vamos usar um artifício de cálculo:

- primeiro, multiplicamos a 1ª equação por +2;
- depois, multiplicamos a 2ª equação por -3.

O sistema sofrerá a seguinte transformação:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 & \times 2 & \rightarrow & 6x + 4y = 8 \\ 2x + 3y = 1 & \times -3 & \rightarrow & -6x - 9y = -3 \end{cases}$$

Agora, podemos somar o sistema:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 8 \\ -6x - 9y = -3 \\ \hline -5y = 5 \end{array} \rightarrow y = -1$$

Para obter o valor de x , devemos substituir o valor de y em uma das equações:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + 3(-1) &= 1 \\ 2x - 3 &= 1 \\ 2x &= 4 \quad \rightarrow \quad x = 2 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par: $(2; -1)$.

Verificação

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \quad \rightarrow \quad 6 - 2 = 4 \quad (\text{verdadeiro}). \\ 2x + 3y &= 1 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 \quad \rightarrow \quad 4 - 3 = 1 \quad (\text{verdadeiro}). \end{aligned}$$

Observação: Você deve ter percebido que o artifício de cálculo, usado para resolver esse sistema, permitiu que a variável x desaparecesse. Isso ocorreu porque a variável x , nas duas equações, ficou com coeficientes simétricos.

Exercício 1

Resolva o sistema por substituição:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 20 \\ 2x + y &= 11 \end{aligned}$$

Exercício 2

Resolva os sistemas por adição:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -6 \end{cases} & \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 3

Resolva os sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases} & \\ \text{b)} \quad \begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases} & \end{aligned}$$

Exercício 4

Verifique se o par $(1; 2)$ é solução para o sistema: $\begin{cases} 10x - 2y = 6 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$

Exercício 5

Escreva um sistema que corresponda à seguinte situação:

Um armário custa o triplo de uma mesa. Os dois juntos custam R\$ 120,00.

Exercício 6

Resolva o sistema do Exercício 5.

Exercícios