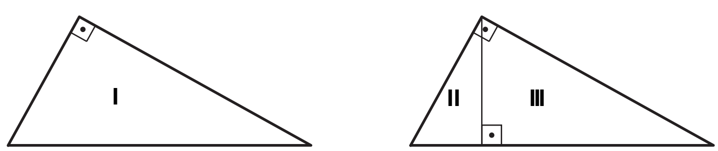
AULA

54

O Teorema de Pitágoras

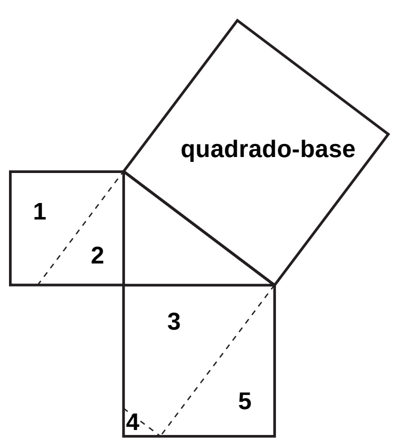
Para pensar

- Com ajuda de um par de esquadros, desenhe dois triângulos retângulos de mesmo tamanho. Represente num deles a altura relativa à hipotenusa, como mostra a figura da direita:



Recortando os triângulos **II** e **III**, você terá três triângulos.
Esses triângulos são semelhantes entre si? Por quê?

- Reproduza a figura abaixo, se possível ampliando-a.



- Recortando nas linhas tracejadas, separe as cinco peças numeradas.
Encaixe as peças **1**, **2**, **3**, **4** e **5** no quadrado-base, de forma que, juntas, preencham-no completamente.
A área do quadrado-base é igual à soma das áreas das cinco peças?

Nossa aula

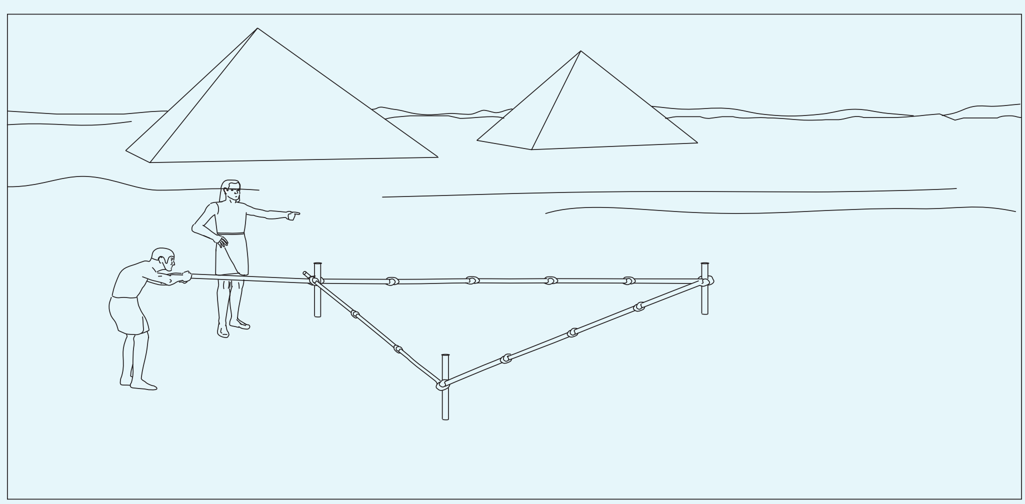
Desde épocas muito remotas, quando começou a erguer casas para se abrigar, o homem sentiu a necessidade de "construir" ângulos retos para verificar se as paredes estavam "no esquadro", isto é, perpendiculares ao chão. Atualmente há instrumentos apropriados para isso, mas não foi sempre assim. Veremos o que a geometria tem a ver com tudo isso.

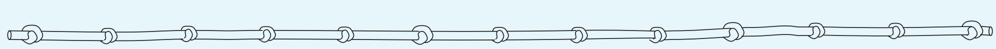
A geometria é uma ciência muito antiga

O triângulo de lados 3, 4 e 5 é utilizado há muitos séculos pelos construtores. Talvez você já tenha ouvido falar das famosas pirâmides egípcias: são enormes monumentos de pedra construídos há muitos séculos.

A maior dessas pirâmides, conhecida como Grande Pirâmide ou Pirâmide de Quéops, foi construída há cerca de 4.500 anos. Sua base é um enorme quadrado, cujo lado mede aproximadamente 230 m, dentro do qual caberiam quatro quarteirões. Sua altura, que é de 146 m, equivale à altura de um prédio de 50 andares.

Os pesquisadores impressionaram-se com o alto grau de precisão dessas construções. A base da Grande Pirâmide é quase um quadrado perfeito: as diferenças entre as medidas de seus lados são muito pequenas e seus ângulos são todos praticamente iguais a 90º. Tais fatos nos levam a crer que os egípcios desenvolveram grandes conhecimentos de geometria. Os diversos documentos escritos naquela época revelam que, por exemplo, o triângulo de lados 3, 4 e 5 já era conhecido dos arquitetos e construtores egípcios. Diz a História que os construtores usavam uma corda, na qual davam nós a intervalos de igual distância, formando com ela esse tipo de triângulo.



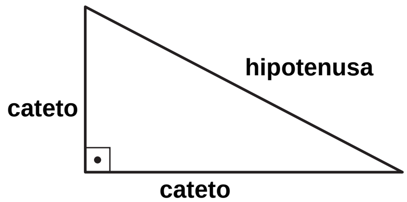


Os arquitetos do Egito Antigo construíam ângulos retos usando uma simples corda com nós.

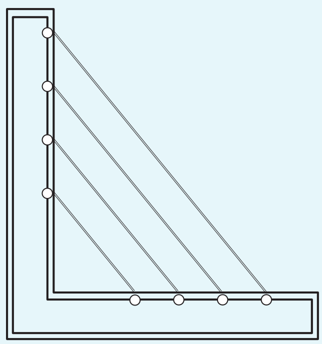
Texto extraído do ***Jornal do Telecurso 1º Grau***. Fundação Roberto Marinho, Ministério da Educação e Cultura, Fundação da Universidade de Brasília, 1989.

O triângulo retângulo

Um triângulo que têm um ângulo de 90º (ângulo reto) é chamado de **triângulo retângulo**. Nele, os lados recebem os seguintes nomes:



A hipotenusa é o maior dos lados e é o lado oposto ao ângulo reto.

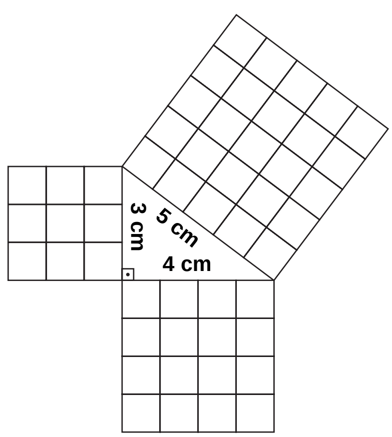


Curiosidade

Hipotenusa era o nome dado às cordas do instrumento musical chamado lira. Essas cordas formavam triângulos retângulos com os lados do instrumento.
A lira, assim como a harpa, são os mais antigos instrumentos de corda. Na Grécia, a invenção da lira era atribuída a Apolo, deus da mitologia grega.

Pitágoras e o triângulo retângulo

Quando falamos em triângulo retângulo, lembramos imediatamente de Pitágoras, o grande matemático que nasceu na Grécia Antiga, por volta do ano 550 a.C. Acredita-se que ele tenha obtido conhecimentos geométricos com agrimensores egípcios, que já usavam o triângulo de lados 3, 4 e 5.



Pitágoras percebeu que, construindo um quadrado sobre cada um dos lados de um triângulo de lados **3u**, **4u** e **5u** (sendo **u** uma unidade qualquer), como mostra a figura acima, apareceria a seguinte relação:

A área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos.

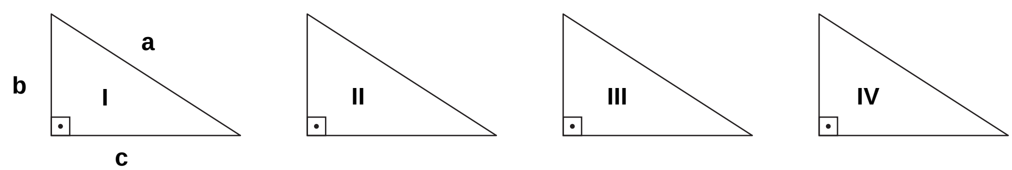
No exemplo acima, você poderá observar que: **25 = 9 + 16**.

O Teorema de Pitágoras

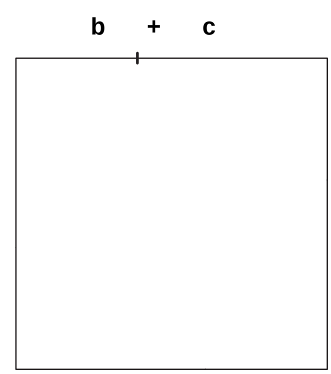
Para Pitágoras, não bastava que essa relação fosse válida para o triângulo de lados 3, 4 e 5. Era preciso provar que a relação valia, também, para **todos** os triângulos retângulos.

Ao construir algumas figuras com papel, acompanhamos melhor esse raciocínio:

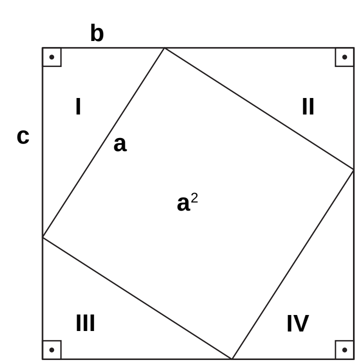
1. Recorte quatro triângulos retângulos iguais.



2. Recorte um quadrado de tal forma que seu lado seja igual à soma das medidas dos catetos de um dos triângulos.

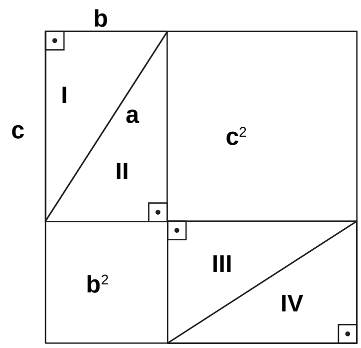


3. Agora, monte a figura abaixo, sobrepondo os triângulos e o quadrado já recortados:



Observe que o quadrado ao centro da figura tem lado **a**, portanto, sua área é igual a $\mathbf{a^2}$.

4. Movimente os triângulos e forme esta outra figura:



Os dois quadrados têm lados **b** e **c**. Portanto, suas áreas são $\mathbf{b^2}$ e $\mathbf{c^2}$.

Conclusão

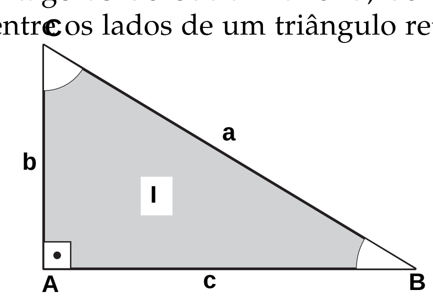
Como o quadrado grande (de lado b + c) é o mesmo nos dois casos, podemos concluir que o quadrado de área $\mathbf{a^2}$ é igual ao quadrado de área $\mathbf{b^2}$ somado ao quadrado de área **c** , ou seja:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

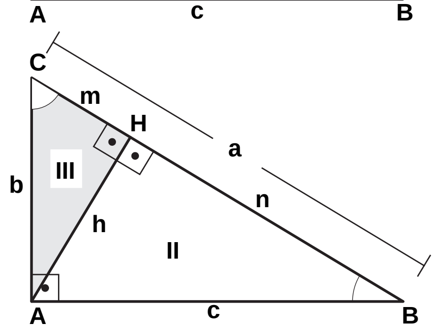
Assim, deduzimos o Teorema de Pitágoras:

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Usando a semelhança de triângulos, podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras de outra maneira, bem como aprender outras relações métricas entre os lados de um triângulo retângulo.

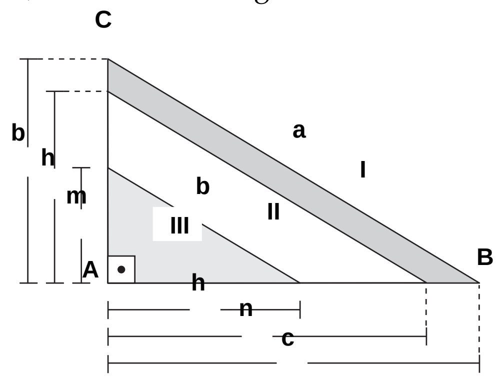


Considere o triângulo ABC, cujos catetos são **b** e **c** e a hipotenusa é **a**.



Trace a altura relativa à hipotenusa. Determinando o ponto H e os segmentos **h**, **m** e **n**, podemos observar que: **a = m + n**.

Desse modo, obtivemos três triângulos semelhantes, ou seja, triângulos que possuem os três ângulos iguais. Para facilitar as conclusões, desenhe os três triângulos sobrepostos, como indica a figura:



Assim:

- Triângulo **I** semelhante ao triângulo **II**, logo:

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{n} = \frac{a}{c}$$

de: $\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$, temos: $\mathbf{c^2 = a \cdot n}$ (1ª relação),

que pode ter a seguinte interpretação:

O quadrado do cateto maior é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto.

- Triângulo **I** semelhante ao triângulo **III**, logo:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{h} = \frac{a}{b}$$

de: $\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$, temos: $\mathbf{b^2 = a \cdot m}$ (2ª relação),

que pode ter a seguinte interpretação:

O quadrado do cateto menor é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto.

- Triângulo **II** semelhante ao triângulo **III**, logo:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{c}{b}$$

de: $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, temos: $\mathbf{h^2 = m \cdot n}$ (3ª relação),

que pode ter a seguinte interpretação:

O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Somando a 1ª e a 2ª relação membro a membro, temos:

$$c^2 + b^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

aplicando a propriedade distributiva

$$c^2 + b^2 = a\,(n + m)$$

como $m + n = a$, chegamos ao Teorema de Pitágoras: $\mathbf{c^2 + b^2 = a^2}$

Exercícios

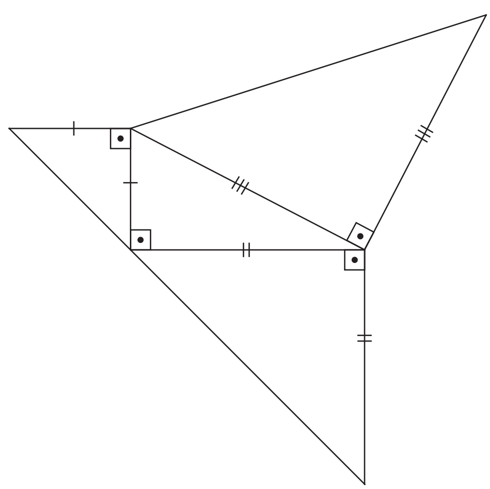
Exercício 1

Aplicando o Teorema de Pitágoras, verifique se são retângulos os triângulos que têm estas medidas de lados:

a) 6 cm, 8 cm e 10 cm
b) 7 cm, 9 cm e 20 cm
c) 4 cm, 5 cm e 6 cm
d) 13 cm, 12 cm e 5 cm

Exercício 2

Desenhe um triângulo retângulo e construa triângulos retângulos e isósceles sobre seus catetos e sua hipotenusa, conforme este modelo:



Em seguida:

a) calcule a área de cada um dos triângulos desenhados sobre os catetos e sobre a hipotenusa;
b) some as áreas dos triângulos desenhados sobre os catetos e compare com a área do triângulo desenhado sobre a hipotenusa.
O que você concluiu?

Exercício 3

Usando as relações métricas no triângulo retângulo, calcule as medidas indicadas na figura: