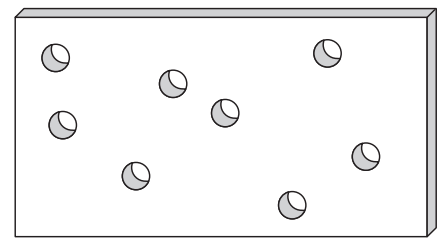
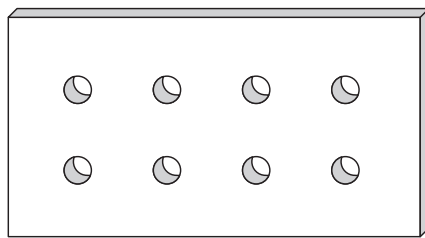


Calculando áreas

Para pensar

- Imagine que você vá revestir o piso de sua sala com lajotas. Para saber a quantidade de lajotas necessária, o que é preciso conhecer: a área ou o perímetro da sala?
- Foram feitos 8 furos iguais em duas placas de madeira. As placas são de mesmo tamanho e mesma espessura, como indica a figura:



Após terem sido furadas, qual delas possui maior área?

- Quantos quadradinhos de 1 centímetro (1cm) de lado serão necessários para cobrir um quadrado de 1 metro quadrado (1m²) de área?

Nossa aula

Leia com atenção o texto seguinte, que foi extraído do **Jornal do Telecurso 1º Grau - Matemática, 3ª fase** (Fundação Roberto Marinho, Editora Globo, 1981).

Calculando áreas

Existem muitas situações práticas que envolvem o cálculo de áreas, como veremos nos exemplos a seguir.

Um azulejista, ao ser chamado para executar um serviço, começará seu trabalho calculando a área das paredes que vão ser revestidas. Depois, ele vai comprar o material e, quando pedir os azulejos, o balconista certamente lhe perguntará quantos metros quadrados ele deseja. Assim, calculando a área das paredes, e das portas e janelas, o azulejista poderá pedir a quantidade certa de azulejos, evitando a falta ou o desperdício de material.

Uma vez elaborado o projeto de uma casa, é necessário preparar seu orçamento. É preciso saber, por exemplo, qual a quantidade de tijolos a ser usada na obra. Para isso, devemos saber quantos metros quadrados de parede a casa terá. Esse cálculo é necessário não apenas para saber a quantidade de material que se deve comprar, mas também para avaliar o custo da mão-de-obra que vai ser utilizada.

As caldeiras industriais são fabricadas com chapas de aço. Quando são projetadas, é preciso calcular a área das chapas que vão ser usadas na sua construção. Esse cálculo serve para fazer o orçamento do custo da caldeira e, também, para prever o peso que ela terá.

Os garotos da rua acertaram a bola numa vidraça, e vão ter de comprar uma nova. Você já foi ao vidraceiro comprar um pedaço de vidro? Quando damos as medidas do vidro que queremos, o vidraceiro faz alguns cálculos e diz o preço a pagar. Você sabe o que ele está calculando? Se não sabe, tente descobrir o que ele calcula.

Esses são alguns dos exemplos que mostram que o cálculo de áreas faz parte do dia-a-dia de muitos profissionais.

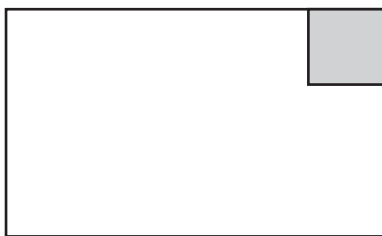
O que é área de uma superfície?

Medir uma superfície é compará-la com outra, tomada como unidade. O resultado da comparação é um número positivo, ao qual chamamos de **área**.

Como não existe instrumento para medir a área de uma superfície, comparamos sua área com a área de uma figura mais simples, como o retângulo ou o quadrado.

EXEMPLO 1

Deseja-se forrar uma parede de $3\text{ m} \times 5\text{ m}$ com quadrados de cortiça de 1 m de lado. Quantos quadrados de cortiça serão necessários?



Para resolver esse problema, é preciso calcular a área da parede, que tem a forma de um **retângulo** e a área do pedaço de cortiça, que tem a forma de um **quadrado**.

$$\begin{aligned}\text{Área do retângulo} &= \text{comprimento} \cdot \text{largura} \\ &= 3\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 15\text{ m}^2\end{aligned}$$

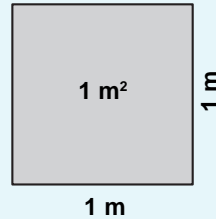
$$\begin{aligned}\text{Área do quadrado} &= \text{lado} \cdot \text{lado} \\ &= 1\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m}^2\end{aligned}$$

Como cada quadrado tem 1 m^2 de área, serão necessários **15 pedaços de cortiça** para forrar a parede.

Unidade de área

Na Aula 15, estudamos unidades específicas para cada figura a ser medida. No quadro abaixo, vamos recordar as unidades de área mais usuais.

- **Metro quadrado (m^2):** é a superfície de um quadrado de 1 metro (1 m) de lado.



- **Quilômetro quadrado (km^2):** é a superfície de um quadrado de 1 quilômetro (1 km) de lado.
- **Centímetro quadrado (cm^2):** é a superfície de um quadrado de 1 centímetro (1 cm) de lado.

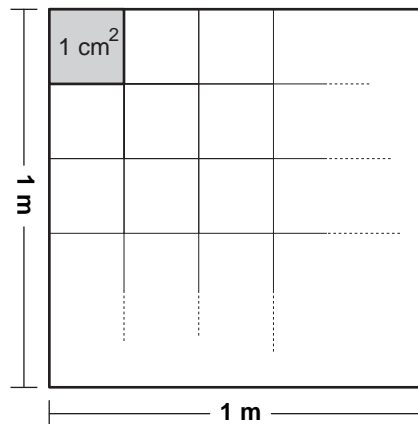
Existem ainda: o hectômetro quadrado (hm^2), o decâmetro quadrado (dam^2), o decímetro quadrado (dm^2) e o milímetro quadrado (mm^2).

Observação: No Brasil, costuma-se usar o **hectare** (ha) ou o **alqueire** para medir grandes extensões de terra. Lembre que:

- 1 hectare (ha) = 10.000 m^2 (um quadrado cujos lados medem 100 metros).
- O **alqueire** não é uma medida uniforme para todo o país. Existem: o alqueire paulista; o alqueire do norte; o alqueire mineiro.

Mudando de unidade

Quantos centímetros quadrados cabem em um quadrado de 1 metro de lado?



Observe que $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, logo, a área desse quadrado é:

$$100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 10.000\text{ cm}^2$$

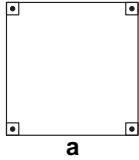
Portanto, concluímos que: em um quadrado de 1 m^2 de área, cabem 10.000 quadradinhos de 1 cm^2 de área, isto é, quadradinhos de 1 cm de lado.

Agora, é sua vez! Quantos quadrados de 1 m de lado são necessários para cobrir um quadrado de 1 km^2 de área?

Área do quadrado

Considere um quadrado qualquer. Usando a álgebra para representar a medida do lado desse quadrado, vamos chamá-lo por **a**.

A área desse quadrado é:



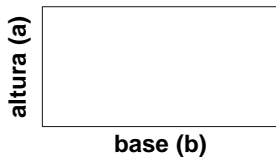
$$A = a \times a = a^2$$

Área do retângulo

Considere um retângulo qualquer, de dimensões **a** e **b**.

A área do retângulo é o produto da medida da base pela altura.

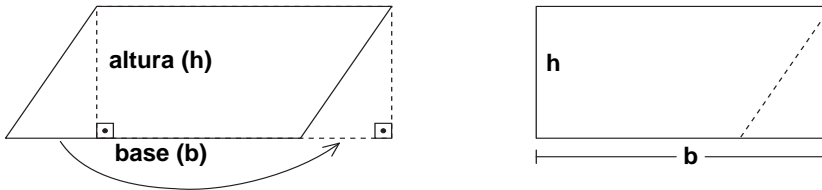
Então:



$$A = b \times a$$

Área do paralelogramo

Observe as figuras abaixo. Podemos “cortar” um pedaço do paralelogramo e encaixá-lo do outro lado, transformando o paralelogramo num retângulo:



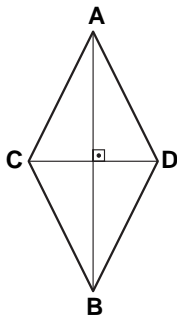
A área do paralelogramo é, assim, igual à área do retângulo obtido, ou seja, ao produto das medidas da base pela altura:

$$A = b \times h$$

Observação: a altura do paralelogramo é a distância de uma base a outra; portanto, é perpendicular à base.

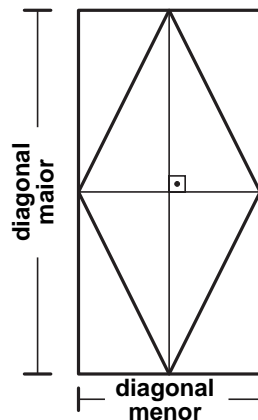
Área do losango

O losango é uma figura geométrica de lados iguais e diagonais perpendiculares.



AB = diagonal maior
CD = diagonal menor

Podemos construir um retângulo de tal forma que o losango fique inscrito nessa construção. Observe que, dessa forma, a área do losango é **metade** da área do retângulo, sendo determinada em função de suas diagonais:



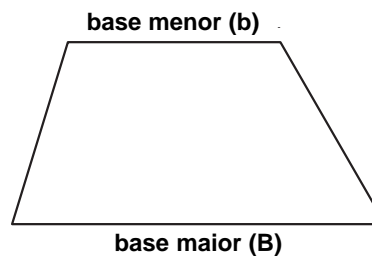
$$\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

ou, em linguagem algébrica:

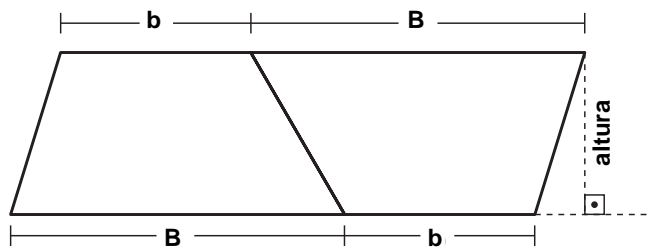
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área do trapézio

O trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos, chamados **bases**:



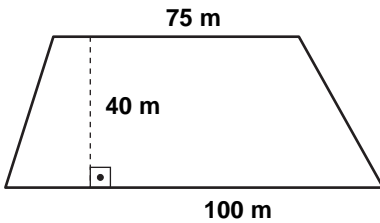
Construa dois trapézios iguais e encaixe-os, colocando um deles de “cabeça para baixo” em relação ao outro.



A figura obtida é um paralelogramo cuja área é o dobro da área do trapézio. Dessa forma, a área do trapézio é:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

Um terreno em forma de trapézio tem 75 m na base menor, 100 m na base maior e 40 m de altura. Qual a área desse terreno?



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(75 + 100) \times 40}{2} = \\ &= \frac{175 \times 40}{2} = \\ &= 175 \cdot 20 = 3.500 \end{aligned}$$

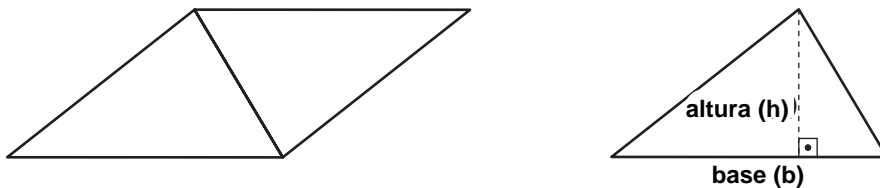
Logo, a área do terreno é de **3.500 m²**.

Área do triângulo

Usaremos um raciocínio semelhante ao que usamos para determinar a área do trapézio. Assim, construímos dois triângulos iguais:

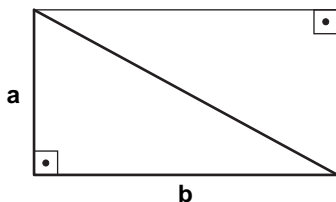


Encaixando-os, como na figura da esquerda, obtemos um paralelogramo cuja área é o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é determinada pelo produto da base pela altura, a área do triângulo é igual à área do paralelogramo dividida por dois.



$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}}{2}$$

Se o triângulo for retângulo, a área pode ser calculada multiplicando-se os catetos e dividindo o resultado por 2, pois, nesse caso, um cateto corresponde à base (**b**) e o outro à altura (**h**).



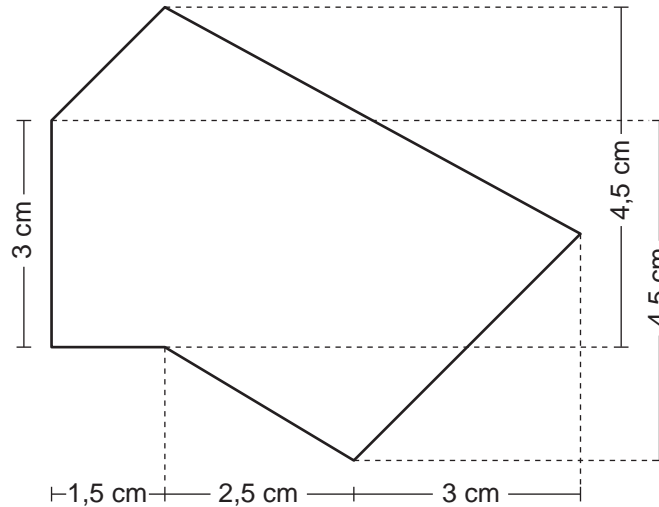
$$A = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{h}}{2}$$

Decompondo figuras planas

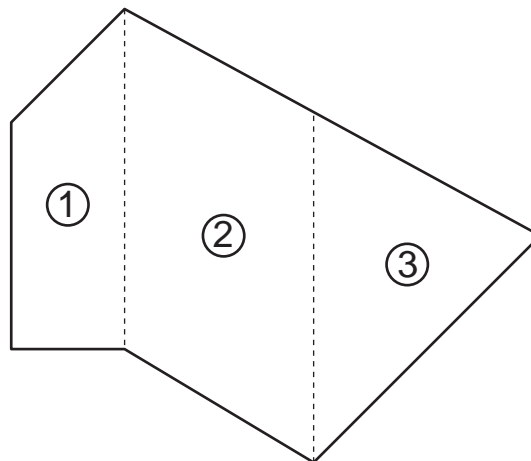
Muitas vezes nos deparamos com “figuras estranhas”, que não são nem triângulos, nem trapézios, nem nenhuma dessas figuras cujas áreas sabemos determinar. E aí, o que fazer? Nesses casos, podemos usar uma técnica muito simples: decompor a “figura estranha” em outras de formatos conhecidos, cujas áreas são mais fáceis de serem obtidas. Veja o exemplo seguinte.

EXEMPLO 3

Calcule a área da figura:



Podemos decompor essa figura da seguinte maneira:



Calculamos, então, a área de cada uma das figuras:

(1) é um trapézio de área: $\frac{(3 + 4,5) \times 1,5}{2} = 5,625 \text{ m}^2$

(2) é um paralelogramo de área: $4,5 \cdot 2,5 = 11,25 \text{ cm}^2$

(3) é um triângulo de área: $\frac{4,5 \times 3}{2} = 6,75 \text{ m}^2$

Somando os três resultados, temos a área da figura dada:

$$5,625 + 11,25 + 6,75 = 23,625$$

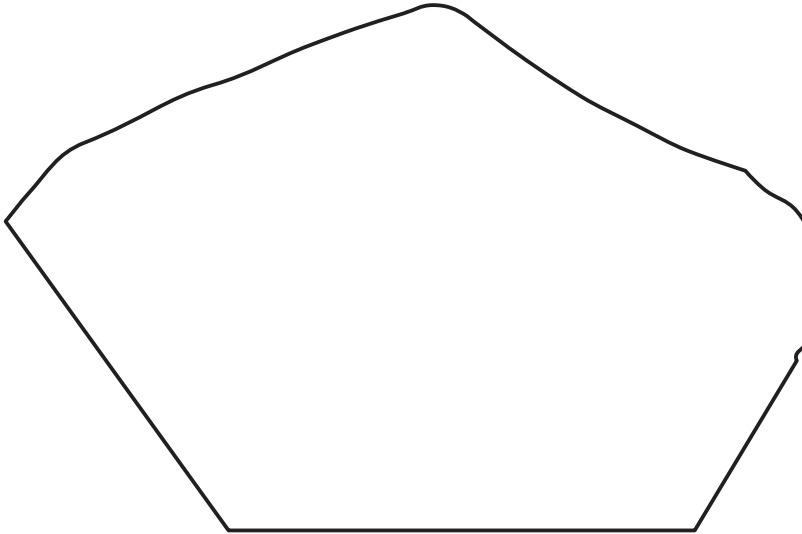
Assim, a área da figura é **23,625 cm²**.

Cálculo aproximado de áreas

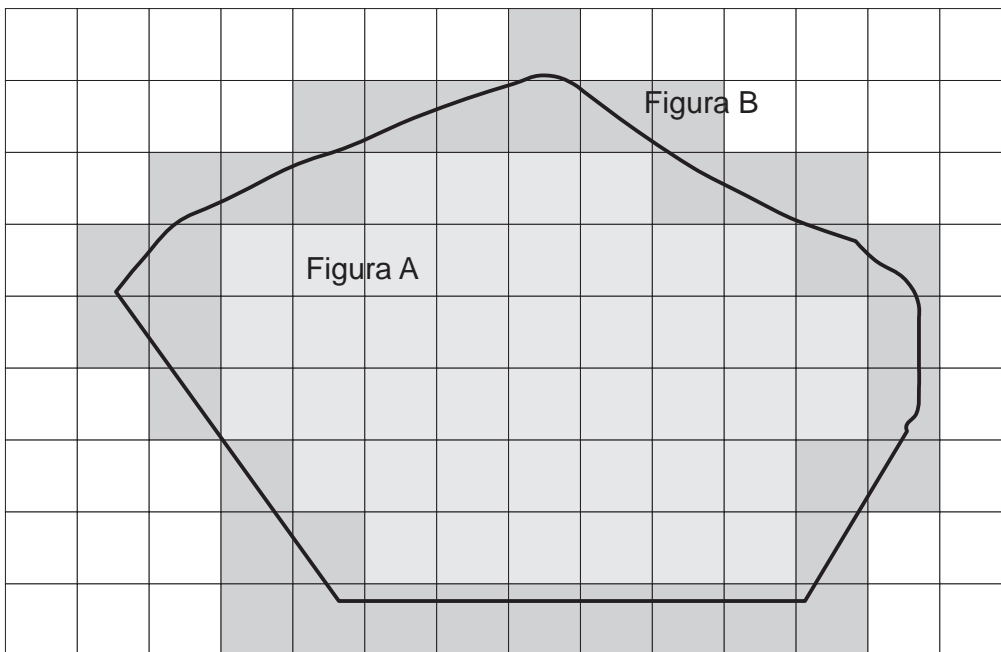
Existem figuras planas cujas áreas são obtidas por cálculos aproximados.

EXEMPLO 4

Esta figura representa a planta de um terreno, na qual cada cm^2 corresponde a 1 km^2 no real. Qual é a área do terreno?



Quadrículamos a figura tomando, por exemplo, o centímetro quadrado como unidade de área:



Contando os quadradinhos internos e os que cobrem a figura, temos:

Figura A (quadradinhos internos) = 43 cm^2

Figura B (quadradinhos que cobrem a figura) = 80 cm^2

A área da figura, portanto, está entre 43 cm^2 e 80 cm^2 .

Aproximamos os valores encontrados por meio de média aritmética:

$$\frac{43 + 80}{2} = 61,5 \text{ cm}^2$$

A área da figura é, portanto, **61,5 cm²**.

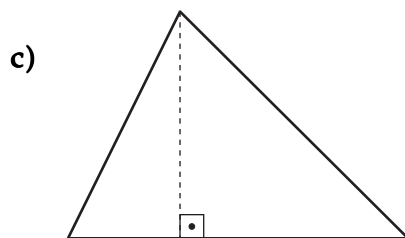
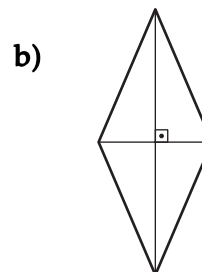
Como cada cm² corresponde a 1 km², na realidade o terreno têm uma área de, aproximadamente, **61,5 km²**.

Observação: Se usarmos uma unidade de área menor, como por exemplo o milímetro quadrado (mm²), o resultado obtido será mais preciso.

Exercícios

Exercício 1

Com a ajuda de uma régua, meça os comprimentos necessários e determine a área das figuras.



Exercício 2

Dê o significado de:

a) 1 m²

b) 1 km²

Exercício 3

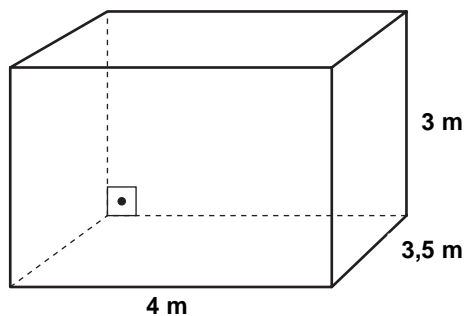
Calcule a área da capa de seu livro de Matemática do Telecurso 2000.

Exercício 4

Calcule a área do banheiro de sua casa.

Exercício 5

Uma cozinha tem formato de um paralelepípedo com as seguintes dimensões:

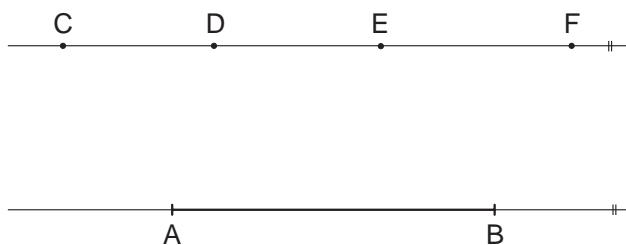


Deseja-se azulejar as paredes dessa cozinha até o teto.

Quantos azulejos devemos comprar, se os azulejos são quadrados de 15 cm de lado?

Exercício 6

Pedro desenhou 2 retas paralelas. Em uma marcou o segmento AB e em outra marcou os pontos C, D, E e F, como mostra a figura:

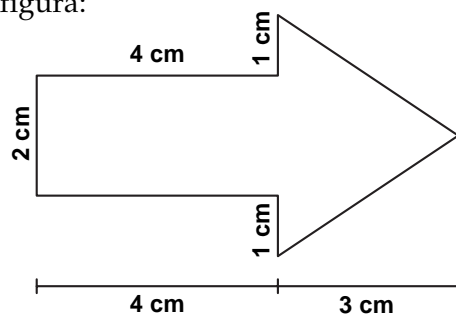


Em seguida ligou alguns pontos formando os triângulos CAB, DAB, EAB e FAB. Analisando esses triângulos, Pedro descobriu um “segredo” sobre suas áreas.

Qual foi o “segredo” descoberto por Pedro?

Exercício 7

Calcule a área da figura:



Exercício 8

Quantos metros quadrados de papel são necessários para forrar uma caixa fechada, no formato de um cubo de 20 centímetros de aresta?

Exercício 9

Considerando o quadradinho como unidade de área (u), determine o valor aproximado da área da figura:

