

Trabalhando com múltiplos

Aula 22

Dona Leonor faz empadinhas e sempre recebe encomendas para festas. Certo dia, ela recebeu três encomendas: uma de 200 empadinhas, outra de 240 e outra de 300. Depois de fazer todas as empadinhas, dona Leonor pensou em embrulhá-las em pacotes iguais. Mais ainda, ela queria que o número de pacotes fosse o menor possível. Para isso, quantas empadinhas deve ter cada pacote?

A fatoração

Para resolver o problema de dona Leonor, é preciso aprender a fatorar, como você já viu na Aula 21.

Fatorar significa escrever um número como produto de outros números.

Por exemplo, podemos escrever:

$$20 = 2 \times 10$$

Mas o número 20 também pode ser escrito de outra forma:

$$20 = 4 \times 5$$

A fatoração que nos interessa é aquela que usa apenas números primos. Você se lembra deles?

Vamos recordar:

Número primo é aquele que só é divisível por 1 e por ele mesmo.

Os números primos menores que 30 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Se fatorarmos o número 20 usando apenas números primos, encontraremos o seguinte resultado:

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

A importância de usar apenas números primos para fatorar é que o resultado será sempre o mesmo para qualquer pessoa que fizer a fatoração.

Vamos aprender a fatorar números maiores. Por exemplo, o número 600.

- Escreva o número que se vai fatorar e faça um traço vertical à sua direita. $600 \mid$
- Verifique se 600 é divisível por 2. É claro que é. Coloque o 2 à direita do traço, faça a divisão e ponha o resultado embaixo do 600. $600 \mid 2$
 300
- Continue dividindo por 2 enquanto for possível. $600 \mid 2$
 $300 \mid 2$
 $150 \mid 2$
 75
- Chegamos ao 75, que não é divisível por 2. Vamos tentar agora a divisão por 3. $600 \mid 2$
 $300 \mid 2$
 $150 \mid 2$
 $75 \mid 3$
 25
- 25 não é divisível por 3. Mas é divisível por 5. Continuamos, então, até obter o quociente 1. $600 \mid 2$
 $300 \mid 2$
 $150 \mid 2$
 $75 \mid 3$
 $25 \mid 5$
 $5 \mid 5$
 1
- Pronto: $600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$.

Observe que qualquer parte dessa lista é um divisor de 600:

- 2 é divisor de 600
- $2 \times 2 = 4$ é divisor de 600
- $2 \times 5 = 10$ é divisor de 600
- $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ é divisor de 600, e assim por diante.



Atividades

Faça no seu caderno.

1. Fatore os números usando apenas fatores primos:
 - a) 80
 - b) 360
 - c) 1 000
 - d) 140
 - e) 165
 - f) 256
 - g) 243

2. Alguém fatorou 480 assim: $480 = 2 \times 4 \times 6 \times 10$. Agora, faça a fatoração usando apenas fatores primos.

Como encontrar todos os divisores de um número

Você vai ver agora como encontrar todos os divisores de um número. Por exemplo, do número 24.

– Inicialmente, fatoramos o número:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

– Em seguida, fazemos um novo traço vertical à direita e colocamos o número 1 em cima:

24	2	1
12	2	
6	2	
3	3	
1		

– Passamos, então, a fazer diversas multiplicações. Observe os números assinalados e a posição do resultado:

2 vezes 1 é igual a 2

24	2	1	2
12	2		
6	2		
3	3		
1			

2 vezes 2 é igual a 4

24	2	1	2
12	2	2	4
6	2		
3	3		
1			

2 vezes 4 é igual a 8

24	2	1	2
12	2	2	4
6	2	2	8
3	3		
1			

– O próximo número é o 3. É um número novo (diferente de 2); por isso, ele deve ser multiplicado por todos os anteriores:

- $3 \times 1 = 3$
- $3 \times 2 = 6$
- $3 \times 4 = 12$
- $3 \times 8 = 24$

24	2	1	2
12	2	2	4
6	2	2	8
3	3		3, 6, 12, 24
1			

– À direita do último traço estão todos os divisores de 24.

Os divisores de 24 são:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24.

Para entender bem o processo, veja um outro exemplo: os divisores de 60.

60	2	1
30	2	2
15	3	4
5	5	3, 6, 12
1		5, 10, 20, 15, 30, 60

Os divisores de 60 são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Alguns números têm muitos divisores, outros têm poucos. Faça as atividades seguintes para praticar e aprender bem.



Atividades

Faça no seu caderno.

3. Encontre todos os divisores de 50.
4. Encontre todos os divisores de 84.
5. Faça o que se pede.
 - a) Encontre todos os divisores de 48.
 - b) Encontre todos os divisores comuns entre 84 e 48, isto é, todos os números que dividem tanto 84 quanto 48.

O maior divisor comum entre dois números

Em muitos problemas, precisamos encontrar o maior número que divide exatamente dois outros. Este número, chamado maior divisor comum entre dois números dados, é representado pela sigla MDC (Maior Divisor Comum).

Comum significa que pertence tanto a um quanto a outro.
Neste caso, queremos dizer que determinado número é divisor tanto de um número quanto de outro.

Vamos tomar como exemplo os números 18 e 24. Já sabemos encontrar todos os seus divisores:

$$\begin{aligned}\text{divisores de } 18 &= 1, 2, 3, 6, 9, 18 \\ \text{divisores de } 24 &= 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\end{aligned}$$

Observe que os divisores comuns a 18 e 24 são 1, 2, 3 e 6. Concluimos, então, que 6 é o maior número que divide exatamente 18 e 24. Escrevemos: $\text{MDC} = 6$.

É claro que, para determinar o MDC entre dois números dados, podemos encontrar todos os seus divisores e observar qual é o maior divisor comum. Mas podemos simplificar esse trabalho.

Por exemplo, qual é o maior número que divide exatamente os números 168 e 108? Veja como é fácil. Inicialmente, fatoramos os dois números usando só números primos:

$$\begin{aligned}168 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ 108 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3\end{aligned}$$

Separamos, então, a maior quantidade de fatores primos comuns aos dois números:

$$\begin{aligned}168 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ 108 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ \text{MDC} &= 2 \times 2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

Podemos ver que 12 é o maior número que divide 168 e, também, 108. Observe ainda que:

$$\begin{aligned}168 &= 12 \times 2 \times 7 = 12 \times 14 \\ 108 &= 12 \times 3 \times 3 = 12 \times 9\end{aligned}$$

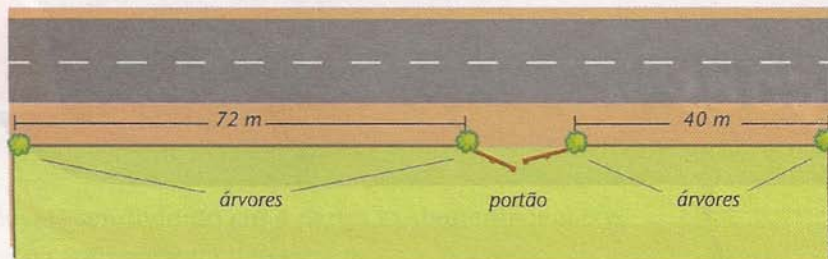


Atividades

Faça no seu caderno.

- Qual é o MDC entre 60 e 80? E entre 60, 80 e 150?
- Usando seus novos conhecimentos, faça agora a atividade 6 das empadinhas da dona Leonor, proposto no início desta aula. (Sugestão: fatore os números 200, 240 e 300 e encontre o MDC entre esses três números. Esse número, o MDC, é a quantidade de empadinhas de cada embrulho.)

8. Seu João tem um sítio cuja frente dá para uma estrada. Observe o esquema:



Na frente do terreno, seu João deseja plantar árvores de tal forma que, tanto à esquerda do portão quanto à direita, exista a mesma distância entre uma árvore e outra. Vamos ajudar seu João? Como ele deseja espaçar ao máximo as árvores, de quantos em quantos metros ele deve plantá-las?