Lista 5 – Análise Dimensional

Introdução

Uma grandeza é todo elemento que seja passível de medida e que as grandezas físicas são aquelas que têm, como objetivo, facilitar o estudo e a descrição de fenômenos físicos.

Ao efetuarmos a medida de uma grandeza, estamos comparando-a com outra, necessariamente da mesma espécie, tomada como padrão. Por exemplo, quando dizemos que o comprimento de uma barra é 6,0 m, estamos afirmando que o comprimento da barra contém 6 vezes a unidade-padrão denominada metro.

Devemos lembrar que existem grandezas fundamentais e grandezas derivadas. Na Mecânica, as grandezas adotadas como fundamentais são: *comprimento* (L); *massa* (M) e *tempo* (T). As demais são consideradas derivadas, pois são geradas a partir das combinações das grandezas fundamentais. Um exemplo é a velocidade, que resulta de uma combinação de comprimento e tempo.

Cada grandeza fundamental pode ser representada por um símbolo dimensional: letra maiúscula que representa a dimensão da grandeza. Assim, no Sistema Internacional, temos: (comprimento) = L; (massa) = M; (tempo) = T; (temperatura termodinâmica) = θ; (intensidade de corrente elétrica) =I; (intensidade luminosa) = I_0 e (quantidade de matéria) = N.

Fórmulas Dimensionais

Qualquer grandeza física derivada pode ser expressa, a menos de um fator numérico, sob a forma de um produto de potências das grandezas fundamentais das quais ela depende. A fórmula dimensional representa a relação entre os símbolos dimensionais.

$G = KX^aY^bZ^c$ e $(G) = (X)^a(Y)^b(Z)^c$

Exemplos:

1. Determinar a fórmula dimensional da velocidade.
Resolução:
A velocidade é definida pelo quociente entre o deslocamento e o intervalo de tempo.
Temos:

$$(\text{velocidade}) = \frac{(\text{deslocamento})}{(\text{tempo})} \Rightarrow (v) = \frac{L}{T} \Rightarrow (v) = LT^{-1}$$

No sistema MLT, temos $(v) = M^0LT^{-1}$

2. Escrever a fórmula dimensional da força, no sistema MLT.
Resolução:
Pela 2ª Lei de Newton,
temos: força resultante = massa x aceleração, então
(força) = (massa) x (aceleração).
Lembrando que:

aceleração = $\dfrac{\text{variação da velocidade}}{\text{intervalo de tempo}}$, temos

$$(a) = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$ e portanto: $(F) = MLT^{-2}$

Previsão de Fórmulas

A análise dimensional pode ser usada na previsão de fórmulas para explicar um dado fenômeno físico. Vamos ilustrar essa afirmação, através de um exemplo: suponhamos que, estudando um determinado fenômeno físico, um pesquisador concluiu que a velocidade do objeto em estudo dependia de certa força F, de certa massa m e de certo comprimento ℓ. Através da análise dimensional, determinar a relação entre v, F, m e ℓ. Represente por K a constante de proporcionalidade.

Resolução:
Sabendo-se que a velocidade depende da força, da massa e do comprimento, o pesquisador pode escrever:

$$v = KF^am^bT\ell^c$$

em que K é a constante de proporcionalidade e a, b e c são números reais a se determinar.

Lembrando que a fórmula dimensional para a velocidade é M^0LT^{-1}; para a força MLT^{-2}, então:

$$M^0LT^{-1} = (MLT^{-2})^a\,(M)^b\,(L)^c$$

$$\text{Ou } M^0LT^{-1} = (M)^{a+b}(L)^{a+c}(T)^{-2a}$$

Comparando, obtém-se:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+c=1 \\ -2a=-1 \end{array}\right\} a=\frac{1}{2};b=-\frac{1}{2};c=\frac{1}{2}$$

portanto, a expressão para a velocidade é:

$$v = K.F^{\frac{1}{2}}.m^{-\frac{1}{2}}.\ell^{\frac{1}{2}} \text{ ou } v = K.\sqrt{\frac{F.\ell}{m}}$$

Exercícios

1. CESGRANRIO) Centrifugador é um aparelho utilizado para separar os componentes de uma mistura, a ela imprimindo um movimento de rotação. A sua eficiência (G) é uma grandeza adimensional, que depende da freqüência do movimento de rotação (f) e do seu raio (r). Sendo esta eficiência definida por $G = K.r.f^2$, então, a constante K, no Sistema Internacional, será:

a) adimensional.
b) expressa em m^{-1}.
c) expressa em $m^{-1}.\ s^2$.
d) expressa em $m.\ s^{-2}$.
e) expressa em s^2.

2. (FUVEST) No Sistema Internacional de Unidades (SI), as sete unidades de base são o metro (m), o quilograma (kg), o segundo (s), o kelvin (K), o ampère (A), a candela (cd) e o mol. A Lei de Coulomb da eletrostática pode ser representada pela expressão $F = (1/4\pi\varepsilon_0)\ Q_1.Q_2/r^2$ onde ε_0 é uma constante fundamental da física e sua unidade, em função das unidades de base do SI, é:

a) $m^{-2}s^2A^2$
b) $m^{-3}kg^{-1}A^2$
c) $m^{-3}kg^{-1}s^4A^2$
d) $mkgs^{-2}$
e) adimensional

3. Um estudante está prestando vestibular e não se lembra da fórmula correta que relaciona a velocidade v de propagação do som, com a pressão P e a massa específica ρ (kg/m^3), num gás. No entanto, ele se recorda de que a fórmula é o tipo $v^a = C \cdot P^b/\rho$, onde C é uma constante adimensional. Analisando as dimensões (unidades) das diferentes grandezas físicas, ele concluiu que os valores corretos dos expoentes a e b são:

a) a = 1, b = 2
b) a = 1, b = 1
c) a = 2, b = 1
d) a = 2, b = 2
e) a = 3, b = 2

4. (ITA) A força da gravitação entre dois corpos é dada pela expressão $F = G\,(m_1m_2)/r^2$. A dimensão da constante de gravitação G é então:

a) $[L]^3\,[M]^{-1}\,[T]^{-2}$
b) $[L]^3\,[M]\,[T]^{-2}$
c) $[L]\,[M]^{-1}\,[T]^2$
d) $[L]^2\,[M]^{-1}\,[T]^{-1}$
e) nenhuma

5. (ITA) A velocidade de uma onda transversal em uma corda depende da tensão F a que está sujeita a corda, da massa m e do comprimento d da corda. Fazendo uma análise dimensional, concluímos que a velocidade poderia ser dada por:

a) F/md
b) $(Fm/d)^2$
c) $\sqrt{(F.m/d)}$
d) $\sqrt{(F.d/m)}$
e) $(md/F)^2$

6. (MACKENZIE) As grandezas físicas A e B são medidas, respectivamente,em newtons (N) e em segundos (s). Uma terceira grandeza C, definida pelo produto de A por B, tem dimensão de:

a) aceleração
b) força
c) trabalho de uma força
d) momento da força
e) impulso de uma força

7. (MACKENZIE) Considerando as dimensões L, M e T, respectivamente, de comprimento, massa e tempo, a dimensão da força é:

a) $[MLT^{-2}]$
b) $[MLT^{-1}]$
c) $[MLT]$
d) $[ML^{-2}T]$
e) $[ML^{-1}T^{-2}]$

8. (MACKENZIE) Nas transformações adiabáticas, podemos relacionar a pressão p de um gás com o seu volume V através da expressão $p \cdot V^y = K$ onde y e K são constantes. Para que K tenha dimensão de trabalho, y:

a) deve ter dimensão de força.
b) deve ter dimensão de massa.
c) deve ter dimensão de temperatura.
d) deve ter dimensão de deslocamento.
e) deve ser adimensional.

9. (MACKENZIE) Numa pesquisa científica fizeram-se algumas medidas e entre elas foram destacadas $G_1 = 2{,}0 \cdot 10^4$kg.m/s^2 e G_2 = 10A.s. As unidades que mostramos são: kg (quilograma), m (metro), s (segundo) e A (ampère). Para a interpretação do fenômeno, tivemos de efetuar a operação $G_1 \div G_2$. O quociente obtido corresponde a:

a) uma intensidade de força.
b) uma intensidade de corrente.
c) um fluxo elétrico.
d) uma quantidade de carga elétrica.
e) uma intensidade de vetor campo elétrico.

10. (MACKENZIE) Na equação dimensionalmente homogênea $x = at^2 - bt^3$, em que x tem dimensão de comprimento (L) e t tem dimensão de tempo (T), as dimensões de a e b são, respectivamente:

a) LT e LT^{-1}
b) L^2T^3 e $L^{-2}T^{-3}$
c) LT^{-2} e LT^{-3}
d) $L^{-2}T$ e T^{-3}
e) L^2T^3 e LT^{-3}

11. (MACKENZIE) A equação A = (vLm)/t é dimensionalmente homogênea. Sendo v velocidade, L comprimento, m massa e t tempo, então A tem dimensão de:

a) força
b) aceleração
c) energia
d) potência
e) velocidade

12. (UECE) Das grandezas a seguir, são dimensionalmente homogêneas, embora tenham significados físicos diferentes:

a) torque e trabalho
b) força e pressão
c) potência e trabalho
d) torque e força

13. (UEL) São unidades de medida de energia:

a) cal e kWh
b) N e kgf
c) kW e cal/s
d) Pa e atm
e) N/m e dina/cm

14. (UFPE) Qual a grandeza física correspondente à quantidade $\sqrt{(5RT/M)}$, onde R é dado em joule . mol^{-1} . K^{-1}, T em K e M em kg/mol?

a) Volume
b) Energia
c) Pressão
d) Aceleração
e) Velocidade

15. (UEM) Na equação $P=A^a.B^b.C^{a/2}.D^c$, A é um comprimento, B é uma freqüência, C é uma força, D é uma velocidade e a, b e c são constantes numéricas. Determine a, b e c para que P seja dimensionalmente uma potência e calcule a expressão $(a.b)^{(a.b+c)}+c$.

Gabarito

1. C **2.** C **3.** C **4.** A **5.** D **6.** E **7.** A
8. E **9.** E **10.** C **11.** C **12.** A **13.** A **14.** E
15. 63